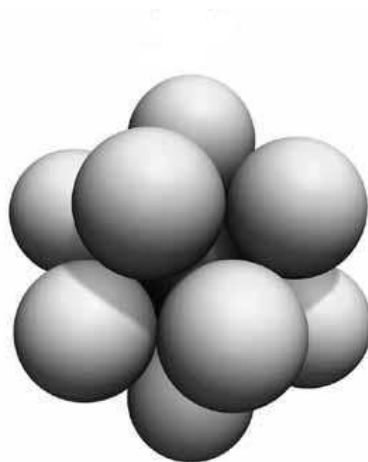


# El problema de las 13 esferas. Parte I

*Guillermo Javier Flores*



El “problema de las 13 esferas”, responde a la pregunta, de cuál es el mayor número, posible de acomodar, de esferas del mismo tamaño no superpuestas, en dimensión tres, que estén en contacto con una esfera central fija. Éste planteamiento, fue un tema de controversia entre los científicos Isaac Newton y David Gregory que tuvo lugar en la Universidad de Cambridge, en Mayo del año 1694.

En el año 1950, H. W. Turnbull, un inspector de escuela de inglés, estaba haciendo una investigación sobre la vida de Isaac Newton. En el transcurso de este trabajo analizó numerosas ponencias, papers, cartas y distintas notas, dentro de los cuales se encontró con dos documentos que le servirían de base para el problema de las 13 esferas. Uno de ellos, era un memorando de una discusión que los dos científicos de Cambridge habrían tenido con respecto al problema. Y el otro, era un cuaderno no publicado el cual contenía algunas notas escritas por Gregory, donde respondía la misma pregunta del problema, primero en dimensión dos y luego en dimensión tres. David Gregory, un buen partidario de Newton, fue a la Universidad de Cambridge para trabajar con él. Durante varios días dialogaban sobre interminables tema científicos. Gregory tomaba notas del gran maestro que libraba sus pensamientos sin parar saltando de una disciplina en otra, desde curvatura de los objetos geométricos, el “humor” despedido por

un cometa, las velocidades de los diferentes colores de la luz, secciones cónicas, la interacción entre distintos planetas, etc. En un momento, ellos estaban discutiendo la distribución de estrellas de varias magnitudes que giran alrededor de un sol central. Entre sus deliberaciones se planteó la cuestión de que si una esfera central podía estar en contacto con otras trece esferas del mismo tamaño, sin superposición. Y aquí es donde sus opiniones discernían, Newton afirmaba que el límite era 12, mientras que Gregory creía que 13 podía ser posible.

En la actualidad, el problema de las 13 esferas, se puede interpretar de una manera más general. El número de contacto, número de osculación o “kissing number”  $k(n)$ , es el número máximo de esferas en  $\mathbb{R}^n$  de igual tamaño no superpuestas que pueden estar en contacto simultáneamente con otra esfera del mismo tamaño (fija).

En tres dimensiones, el número de contacto  $k(3)$ , es precisamente el planteamiento que se hicieron los grandes matemáticos Newton y David Gregory. Éste es conocido como el “problema de las trece esferas” en honor a la famosa discusión entre ellos.

La primera prueba que  $k(3) = 12$ , fue dada por Schütte y Van Der Waerden en el año 1953. En 1956 John Leech da una demostración elegante y compacta (de sólo dos páginas) de este problema, pero para poder comprender esta prueba, se necesita de resultados sofisticados de trigonometría esférica.

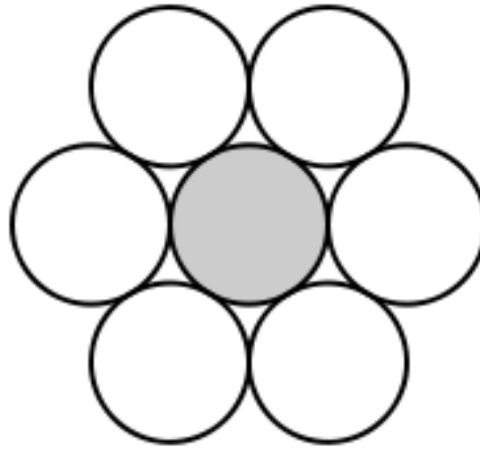
El problema de las trece esferas, sigue siendo de gran interés en la actualidad para muchos matemáticos y nuevas demostraciones son publicadas, como ser las de Hsiang, Maehara, Anstreicher y Böröczky. Algo para destacar de este problema, es que siendo tan geométrico y representativo físicamente, no existe todavía una demostración sencilla, es decir, con herramientas básicas de la matemática. Todas las demostraciones conocidas de este problema, requieren de conocimientos específicos y complejos de la matemática. Nosotros presentaremos un breve estudio de la demostración de Oleg Musin dada en el año 2004, basada en el método de Philippe Delsarte.

## Introducción

En dimensión 1 el número de contacto es 2 y es muy fácil de calcular. En dimensión 2, se puede ver de manera sencilla que  $k(2) = 6$ . Podemos apreciar gráficamente, en dimensión 1:



En dimensión 2:



Cuando queremos plantear el problema para obtener  $k(3)$ , se nos presenta una dificultad que no tenemos en las dimensiones 1 y 2. Si acomodamos siete bolas de billar sobre una mesa, como en el dibujo anterior, podemos colocar por la parte superior exactamente tres bolas más que estén en contacto con la bola central. Y si hacemos lo mismo en la parte inferior, obtenemos de manera sencilla doce bolas tocando la bola central. Esta manera de acomodar las esferas es conocida como la configuración de Johannes Kepler. La cual nos dice que  $k(3)$  es mayor o igual que doce.

Existe una manera particular de acomodar doce bolas en contacto con una bola central, llamada configuración icosaedro. Un icosaedro regular es un sólido

limitado por 20 caras, las cuales son todas triángulos equiláteros iguales.

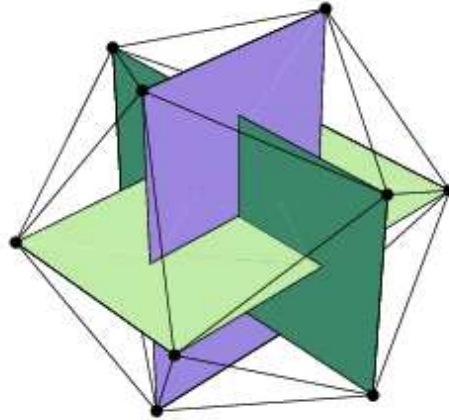
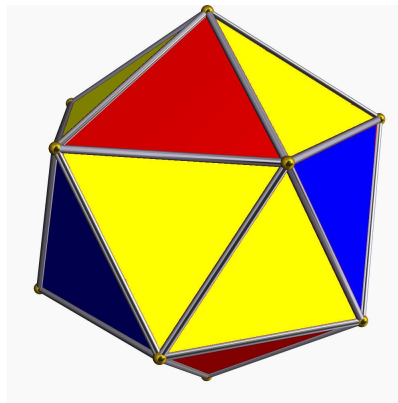


Figura 1: icosaedro regular



Colocando una esfera en cada vértice del icosaedro, de radio la mitad de un lado entre dos vértices, y colocando una esfera en el centro del sólido, podemos obtener doce esferas que están en contacto con la esfera central, pero no se tocan entre ellas. Esta manera de acomodar las esferas, se conoce como configuración icosaedro.

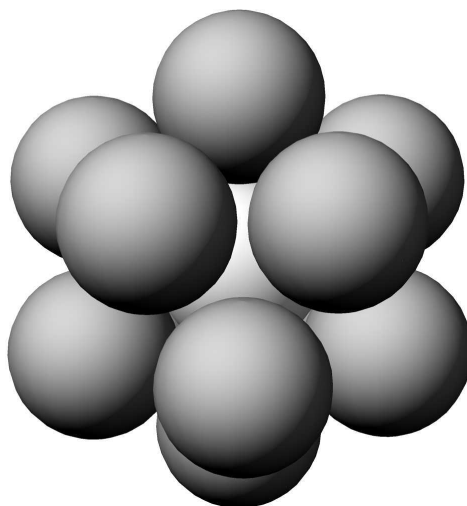


Figura 2: configuración icosaedro

Una observación importante es que si uno toma una de las esferas que no sea la central, puede moverla libremente sin que toque una de las otras esferas. Lo cual nos dice, que en realidad existen infinitas maneras de acomodar doce esferas alrededor de una fija. Y además, el espacio que “sobra” no es para nada despreciable con respecto a la superficie de una esfera. Es por esto, que David Gregory se preguntaba si existiese alguna manera especial de acomodar las doce esferas y que sobre lugar para encajar una más.

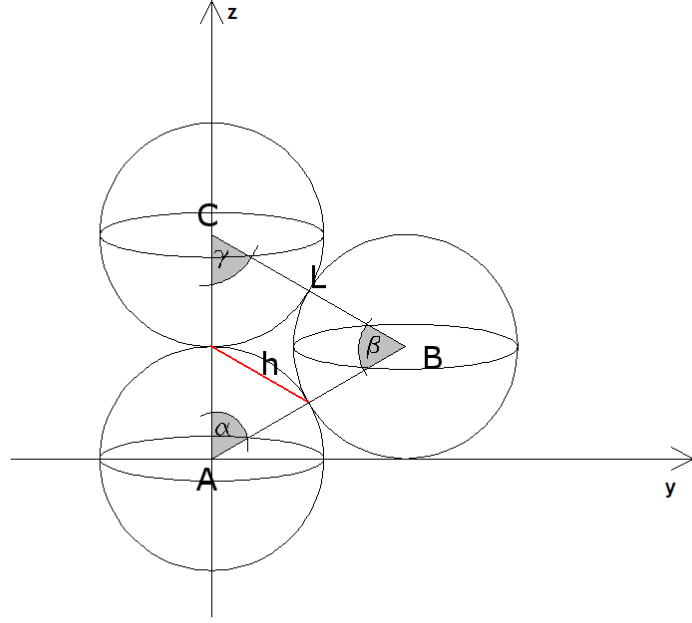
Si retomamos la configuración de Kepler, podemos darnos cuenta que esta configuración es rígida en el siguiente sentido: las esferas que están en contacto con la bola central, están simultáneamente en contacto con otras, entonces si quisiéramos mover una de las bolas que no sea la central, como en la configuración icosaedro, entonces el esquema se rompe.

Otro resultado que en algún sentido convencía a David Gregory que “ $k(3) = 13$ ” es el siguiente. Un primer análisis matemático que podemos realizar sobre el problema, tiene que ver con el área de las esferas.

Consideremos tres esferas de radio uno no superpuestas, que tomadas de a dos estén en contacto, como se muestra en la siguiente figura

En cierto modo, ésta es la manera más densa de juntar tres esferas.

Como el radio de las esferas es 1, el triángulo equilátero formado por  $ABC$  tiene lado  $L = 2$ , y luego  $h = 1$ .



Ahora, supongamos que en el problema de las trece esferas, colocamos algunas esferas en contacto con la bola fija, y luego las enumeramos. La esfera  $S_i^2$  tiene un punto  $x_i$  que está en contacto con la esfera central, es decir  $x_i \in S^2$ . Luego, estos puntos de contacto, tomados de a pares, digamos  $(x_i, x_j)$ , satisfacen

$$\phi_{i,j} \geq 60^\circ, \quad \text{distancia angular, o bien}$$

$$d_{i,j} \geq h = 1, \quad \text{distancia euclídea.}$$

Supongamos que colocamos una esfera en el polo norte de la bola central, entonces podemos tener en cuenta el conjunto  $H \subset S^2$  en forma de “casco”, dado por

$$H = \left\{ (x, y, z) \in S^2 : \frac{\sqrt{3}}{2} \leq z \leq 1 \right\},$$

notar que  $\cos(30^\circ) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ .

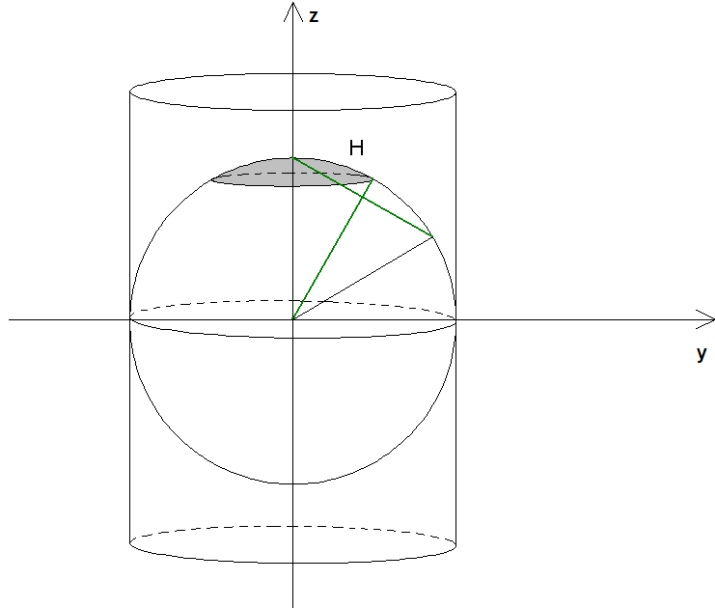


Figura 3:

Para calcular el área de  $H$ , usaremos un resultado de Arquímedes sobre la esfera incrustada en el cilindro (como en la figura), el cual nos afirma que

$$\text{área}(H) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)2\pi \approx 0,841787214$$

y

$$\text{área}(S^2) = 4\pi \approx 12,56637061;$$

como

$$15\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)2 > 4,005$$

entonces

$$15 \text{ área}(H) > 4\pi.$$

Por lo tanto, tenemos que  $k(3) \leq 14$ .

$$k(3) = 12$$

Consideremos la familia de polinomios de Legendre  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , definida de manera recurrente como sigue

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

$$f_k(t) = \frac{2k-1}{k} t f_{k-1}(t) - \frac{k-1}{k} f_{k-2}(t),$$

o equivalentemente

$$f_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k.$$

Esta última igualdad, es conocida como la fórmula de Rodrigues.

Lema 1 Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  subconjunto de puntos contenidos en  $S^2$ . Denotamos  $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$  la distancia angular entre  $x_i$  y  $x_j$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_k(\cos(\phi_{i,j})) \geq 0 \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Ahora, tomamos el siguiente polinomio de grado 9:

$$f(t) = \frac{2431}{80} t^9 - \frac{1287}{20} t^7 + \frac{18333}{400} t^5 + \frac{343}{40} t^4 - \frac{83}{10} t^3 - \frac{213}{100} t^2 + \frac{1}{10} t - \frac{1}{200},$$

el cual nos permite enunciar los dos siguientes resultados.

Lema 2 Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$ , entonces

$$s(X) \doteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) \geq n^2.$$



Lema 3 Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$  tal que  $\phi_{i,j} \geq 60^\circ$ , para todo  $i, j$ , entonces

$$s(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) < 13n.$$

Teorema  $k(3) = 12$ .

Demostración: Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$ , y supongamos que  $k(3) = n$ , donde  $x_j$  es el punto de contacto sobre  $S^2$  al apoyar la esfera  $j$ -ésima sobre la esfera fija. Así,  $X$  está bajo las codiciones del Lema 2 y del Lema 3, esto implica

$$n^2 \leq s(X) < 13n,$$

entonces tenemos que  $n < 13$ , o bien  $n \leq 12$ .

Por otro lado, sabemos que  $k(3) \geq 12$ .

□

Analizaremos los puntos más importantes de las demostraciones de los lemas.

Usando la definición de recurrencia de los polinomios de Legendre, podemos calcular los primeros diez:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1, & f_1(t) &= t, & f_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \\ f_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, & f_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}, \\ f_5(t) &= \frac{63}{8}t^5 - \frac{35}{4}t^3 + \frac{15}{8}t, & f_6(t) &= \frac{231}{16}t^6 - \frac{315}{16}t^4 + \frac{105}{16}t^2 - \frac{5}{16}, \\ f_7(t) &= \frac{429}{16}t^7 - \frac{693}{16}t^5 + \frac{315}{16}t^3 - \frac{245}{112}t, \\ f_8(t) &= \frac{6435}{128}t^8 - \frac{3003}{32}t^6 + \frac{3465}{64}t^4 - \frac{315}{32}t^2 + \frac{35}{128}, \\ f_9(t) &= \frac{12155}{128}t^9 - \frac{6435}{32}t^7 + \frac{9009}{64}t^5 - \frac{1155}{32}t^3 + \frac{315}{128}t. \end{aligned}$$

Es fácil de verificar que el polinomio  $f(t)$  que definimos después del Lema 1, lo podemos escribir como

$$f = f_0 + \frac{8}{5}f_1 + \frac{87}{25}f_2 + \frac{33}{20}f_3 + \frac{49}{25}f_4 + \frac{1}{10}f_5 + \frac{8}{25}f_9 = \sum_{k=0}^9 c_k f_k,$$

y notar que los coeficientes  $c_k$  son mayores o iguales que cero.

Prueba del Lema 2: Como podemos expresar a  $f$  en términos de las funciones  $\{f_k\}_{k=1}^9$

$$f = \sum_{k=0}^9 c_k f_k,$$

donde  $c_0 = 1$  y  $c_k \geq 0$  para  $k = 1, 2 \dots 9$ . Usando el Lema 1, tenemos que

$$\begin{aligned} s(X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=0}^9 c_k f_k(\cos(\phi_{i,j})) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^9 c_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_k(\cos(\phi_{i,j})) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_0 f_0 = n^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $s(X) \geq n^2$ .

□

Para entender las demostraciones de los otros dos lemas, usaremos un resultado básico y simple de geometría esférica, que es la ley de los cosenos en triángulos esféricos.

La intersección de una esfera con un plano que contenga su centro genera un círculo máximo y una circunferencia máxima sobre la esfera. Un círculo máximo divide la esfera en dos hemisferios iguales. Si tres puntos de la superficie esférica son unidos por arcos de círculo máximo menores a  $180^\circ$ , la figura obtenida se denomina triángulo esférico. Los lados del polígono así formado se expresan por conveniencia como ángulos cuyo vértice es el centro de la esfera y no por su longitud. Este arco medido en radianes y multiplicado por el radio de la esfera es la longitud del arco.

Observemos el siguiente triángulo esférico, como muestra la Figura 3, y definamos: sean  $O$  el centro de la esfera,  $u$  el vector desde el origen hasta  $C$ ,  $v$  el

vector desde el origen hasta  $A$  y  $w$  el vector desde el origen hasta  $B$ . Además consideremos  $a$  como el arco formado por  $AC$ ,  $b$  el arco formado por  $CB$  y  $c$  el arco formado por  $AB$ .

Sabemos que se cumple en general

$$u \cdot v = |u| |v| \cos(a),$$

como  $u$ ,  $v$  y  $w$  son vectores unitarios, tenemos que

$$\begin{cases} u \cdot v = \cos(a) \\ w \cdot u = \cos(b) \\ w \cdot v = \cos(c) \end{cases}$$

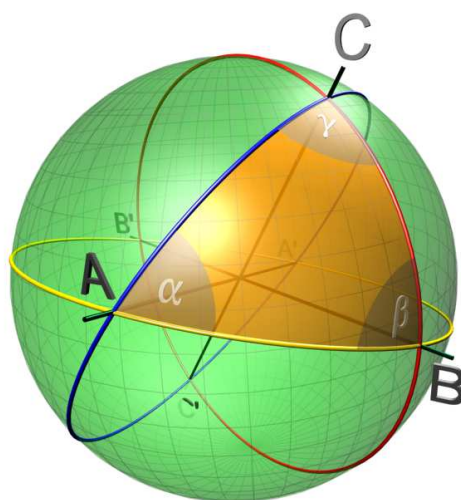


Figura 4: triángulo esférico

Para obtener  $\gamma$  en términos de  $u$ ,  $v$  y  $w$ , necesitamos los vectores tangentes unitarios a  $u$ ,  $t_a$  y  $t_b$ , a lo largo de las direcciones de los arcos  $a$  y  $b$  respectivamente. Luego

$$t_a = \frac{v - u(u \cdot v)}{|v - u(u \cdot v)|} = \frac{v - u \cos(a)}{\sin(a)}$$

y

$$t_b = \frac{w - u(u \cdot w)}{|w - u(u \cdot w)|} = \frac{w - u \cos(b)}{\sin(b)}$$

por lo tanto

$$\cos(\gamma) = t_a \cdot t_b = \frac{\cos(c) - \cos(a) \cos(b)}{\sin(a) \sin(b)},$$

o bien, podemos obtener, lo que llamamos ley de los cosenos en triángulos esféricos

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\gamma).$$

Observación: notar que en los triángulos esféricos se satisface que

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ.$$

Prueba del Lema 1: Los polinomios de Legendre, satisfacen la siguiente igualdad, que es conocida como una de las propiedades adicionales de ésta familia de polinomios,

$$f_k(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\varphi)) =$$

$$f_k(\cos(\theta_1)) f_k(\cos(\theta_2)) + 2 \sum_{m=1}^k \frac{(k-m)!}{(k+m)!} f_k^m(\cos(\theta_1)) f_k^m(\cos(\theta_2)) \cos(m\varphi) =$$

$$\sum_{m=0}^k c_{m,k} f_k^m(\cos(\theta_1)) f_k^m(\cos(\theta_2)) \cos(m\varphi),$$

donde

$$f_k^m(t) = (1-t)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} f_k(t) \quad \text{y} \quad c_{m,k} = \frac{(k-m)!}{(k+m)!} > 0.$$

Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S^2$  y  $x_i$  tiene coordenadas esféricas  $(\theta_i, \varphi_i)$ . Luego por la ley de los cosenos

$$\cos(\phi_{i,j}) = \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) + \sin(\theta_i) \sin(\theta_j) \cos(\varphi_{i,j}), \quad \varphi_{i,j} \doteq \varphi_i - \varphi_j,$$

por lo que obtenemos

$$\sum_{i,j} f_k(\cos(\phi_{i,j})) = \sum_{i,j} \sum_{m=0}^k c_{m,k} f_k^m(\cos(\theta_i)) f_k^m(\cos(\theta_j)) \cos(m\varphi_{i,j}) =$$

$$\sum_k c_{m,k} \sum_{i,j} u_{m,i} u_{m,j} \cos(m\varphi_{i,j}), \quad u_{m,i} \doteq f_k^m(\cos(\theta_i)).$$

Ahora veamos que si  $u_1, u_2 \dots u_n \in \mathbb{R}$  entonces

$$\sum_{i,j} u_i u_j \cos(m\varphi_{i,j}) \geq 0.$$

Tomamos  $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^2$  con coordenadas

$$v_i = (\cos(m\varphi_i), \sin(m\varphi_i)),$$

y consideramos  $v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ , entonces

$$0 \leq \|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{i,j} u_i u_j \cos(m\varphi_{i,j}).$$

□

Con estos resultados, finalizamos esta Parte I del trabajo. En la siguiente edición de la revista, continuaremos con un breve estudio de la prueba del Lema 3, que se basa en cálculos puramente técnicos donde se usan propiedades particulares que tiene la función  $f$  y la ley de cosenos en triángulos esféricos. Además presentaremos algunas soluciones conocidas sobre el problema de número de osculación en dimensiones mayores que 3; las relaciones de estos problemas con la teoría de “Retículos” (o conocidos como Lattices) y problemas semejantes que son estudiados actualmente y se derivan del problema de las trece esferas. También haremos algunos comentarios sobre el resultado de Arquímedes de la esfera incrustada en el cilindro; propiedades de la familia de polinomios de Legendre, que en realidad son un caso especial de una familia de polinomios más general conocida como la flia. de Gegenbauer. Y concluiremos con una tabla en donde podemos apreciar algunas soluciones para  $k(d)$  con  $d \geq 4$ , o las mejores aproximaciones que son conocidas actualmente.

## Referencias

[1] J. Leech, *The problem of the thirteen spheres*, Math. Gazette 41 (1956), 22-23.

[2] O. R. Musin, *The Kissing problem in three dimensions*, cite as: arXiv:math/0410324v3 [math.MG].

[2] O. R. Musin, *The kissing number in four dimensions*, preprint, September 2003, math. MG/0309430.

[4] G. G. Szpiro, *Newton and the kissing problem*, <http://plus.maths.org/issue23/features/kissing/>.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física. FaMAF.  
Universidad Nacional de Córdoba.  
guillexeneize@gmail.com